REPRESENTATIONS INTEGRALES DE NOYAUX DE TYPE POSITIF RELATIVEMENT A UN SOUS ESPACE VECTORIEL. CAS UNITAIRE.

Reçu le 08/03/1999 – Accepté le 30/12/2000

Résumé

Cet article est consacré aux représentations intégrales de certains noyaux, définis sur $E\times E$ où E est un espace vectoriel sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. Ces noyaux sont de type positif relativement à un sous-espace vectoriel. La méthode utilisée repose sur les résultats concernant les représentations intégrales de noyaux défini-positifs sur des espaces vectoriels.

Mots clés: *Noyaux de type positif, Noyaux définis-positifs, Représentations intégrales, Prénœud unitaire.*

Abstract

The present paper is devoted to integral representations of some kernels defined on $E\times E$ with E being a vector space on the field $\mathbb{C}$ of complex numbers. These kernels are of positive type with respect to a vector subspace. The used method lies on results for integral representations of definite positive kernels on vector spaces.

Key words: *Integral representations, Positive-definite kernels, Kernels of positive type, Quasi-node.*

S. KHELIFATI
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Boumerdès
35000 Boumerdès, Algérie

ملخص

الهدف من هذا المقال، دراسة التمثيلات التكاملية لصنف من النوى المعرفة على الفضاء E x E، حيث E فضاء شعاعي معرف على الحقل العقدي $\mathbb{C}$.
هذه النوى من النمط الموجب نسبيا بالنسبة إلى فضاء شعاعي جزئي.
الطريقة المستعملة تعتمد على النتائج المتعلقة بالتمثيلات التكاملية للنوى المعرفة موجبا على الفضاءات الشعاعية

كلمات المفتاح:التمثيلات التكاملية، النوى المعرفة موجبا، شبه العقد.

Soit S un ensemble et $k(s,t)$ une fonction définie sur $S\times S$ à valeurs dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. Cette fonction définit une forme sésquilinéaire, appelée noyau, sur $E\times E$ à valeurs dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, et où E est l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{n+1}$; K: $E\times E\to\mathbb{C}$ par:

$$K(x,y)=\sum_{i,j=0}^{n}k(s_i,s_j)x_i\overline{y}_j ,$$

où $n\in\mathbb{N}$, $s_p\in S$, $x_p,y_p\in\mathbb{C}$, $p = 0, 1,\ldots,n$.

Le noyau K est dit:

i) hermitien si: $$k(s,t)=\overline{k(t,s)},\quad \forall s,t\in E, \tag{1}$$

c'est-à-dire que $K=K^*$;

ii) défini-positif si $\forall s_0,s_1,\ldots,s_n\in S,\quad \forall x_0,x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{C}$, on a l'inégalité:

$$\sum_{i,j=0}^{n}k(s_i,s_j)x_i\overline{x}_j\geq 0 \tag{2}$$

qui peut s'écrire $K(x,x)\geq 0,\quad \forall x=(x_0,x_1,\ldots,x_n)\in E$;

iii) de type positif si l'inégalité (2) est vérifiée pour tous les x_i vérifiant:

$$x_0+x_1+\ldots+x_n=0 \tag{3}$$

qui peut s'écrire $K(x,x)\geq 0,\quad \forall x=(x_0,x_1,\ldots,x_n)\in E_1$ où:

$$E_1=\{(x_0,x_1,\ldots,x_n)\in E : x_0+x_1+\ldots+x_n=0\}$$

qui est sous-espace vectoriel de E_1. On dit, dans ce cas, que le noyau K est de type positif relativement au sous-espace vectoriel $E_1\subset E$.

En guise d'introduction, donnons deux exemples de représentations intégrales de deux noyaux classiques. Soit $f:(-a,a)\to\mathbb{C}$ une fonction continue en $x = 0$, vérifiant les conditions:

$$f(0)=0,\ f(-s)=\overline{f(s)},\ \forall s\in(-a,a). \qquad (4)$$

La fonction $k(s,t)=f(s-t)$, donnée sur [0,a)×[0,a), définit un noyau de type convolué:

$$K(x,y)=\int_0^a\int_0^a k(s,t)x(s)\overline{y(t)}dsdt=\int_0^a\int_0^a f(s-t)x(s)\overline{y(t)}dsdt \quad (5)$$

sur $E\times E$ où E est l'espace vectoriel des fonctions continues sur [0, a[à valeurs de $\mathbb{C}$, E = C [0, a[.

Si le noyau K donné dans (5) est défini-positif sur $E\times E$, alors la fonction f vérifiant (4) est dite de classe P_a et la fonction-noyau $k(s,t)=f(s-t)$ admet une représentation intégrale [3] de la forme:

$$k(s,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda s}d\sigma(\lambda)e^{-i\lambda t},\ \ s,t\in[0,a), \qquad (6)$$

ou bien:

$$K(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^a e^{i\lambda s}x(s)ds\right)d\sigma(\lambda)\left(\overline{\int_0^a e^{i\lambda t}y(t)dt}\right) \qquad (7)$$

où $d\sigma(\lambda)$ est une mesure positive sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\int_{-\infty}^{+\infty}d\sigma(\lambda)<+\infty$.

Soit:
$$E_1=\left\{\phi\in E:\int_0^a\phi(s)ds=0\right\} \qquad (8)$$

qui est un s.e.v. de E. On sait [4, 8] que le noyau défini dans (5) est de type positif relativement au s.e.v. E_1 (on dit aussi qu'il est de type positif d'ordre un) si et seulement si le noyau auxiliaire K_1 défini, à partir de k, par:

$$K_1(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}k_1(s,t)x(s)\overline{y(t)}dsdt, \qquad (9)$$

où $k_1(s,t)=k(s,t)-k(s,0)-k(0,t)=f(s-t)-f(s)-\overline{f(t)}$ et f, vérifiant (4), est défini-positif sur E. Dans ce cas, la fonction f est dite de classe G_a, et on a la représentation intégrale de K sur $E_1\times E_1$:

$$K(x,y)=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^a u_1(s,\lambda)x(s)ds\right)d\sigma_1(\lambda)\left(\overline{\int_0^a u_1(t,\lambda)y(t)dt}\right), \quad (10)$$

où $u_1(r,\lambda)=\dfrac{e^{ir}-1}{i\lambda},\ \forall\lambda\neq 0$ et $u_1(r,0)=r$, c'est-à-dire que:

$$K(x,y)=\int_{\mathbb{R}-\{0\}}\left(\int_0^a e^{i\lambda s}x(s)ds\right)\frac{d\sigma_1(\lambda)}{\lambda^2}\left(\overline{\int_0^a e^{i\lambda}y(t)dt}\right)$$
$$+\left(\int_0^a sx(s)ds\right)\sigma_0\left(\overline{\int_0^a ty(t)dt}\right),\ \forall x,y\in E_1,$$

et $d\sigma_1(\lambda)$ est une mesure positive sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{d\sigma_1(\lambda)}{1+\lambda^2}<+\infty$, σ_0 étant une constante.

De même, il existe des représentations analogues dans les cas discrets [5, 6].

Les noyaux de type positif d'ordre un sont intimement liés aux fonctions caractéristiques de lois de probabilités indéfiniment divisibles [6]. Une fonction f définie sur $]-a,a[$ est dite de classe P_a^* si pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe $f_n\in P_a$ telle que $f=f_n^n$. Si on a la condition de normalisation $f(0)=0$, alors P_∞^* est l'ensemble des fonctions caractéristiques des lois de répartitions indéfiniment divisibles. On sait aussi que si $f\in G_a$, alors $exp(-f)\in P_a^*$ [4]. Signalons qu'on rencontre aussi ces noyaux dans la théorie des processus aléatoires stationnaires.

De nombreux travaux sont consacrés aux représentations intégrales de noyaux défini-positifs. Des schémas généraux sont proposés par de nombreux auteurs dont V.E. Katsnelson [1] qui a étudié les représentations intégrales de ces noyaux dans des cas très généraux. En se basant sur ses résultats et suivant sa méthode, on construit, dans cet article, un schéma abstrait plus général pour l'étude des représentations intégrales de noyaux de type positif relativement à un sous-espace vectoriel qui généralise les représentations intégrales (10) pour les noyaux de type positif d'ordre $r\in\mathbb{N}$. Ensuite, on donnera une illustration de cette méthode pour donner des représentations intégrales pour une suite d'opérateurs de la forme $\{C_{p-q}\}, p,q\in\mathbb{N}$.

Position du problème

Soient, d'une part, E un espace vectoriel sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, K un noyau hermitien défini de $E\times E$ dans $\mathbb{C}$ et E_1 un sous espace vectoriel de E. Soient, d'autre part, H un espace hilbertien, $u(\lambda)$ une fonction définie sur un espace topologique S dont les valeurs sont des opérateurs linéaires de E dans H, u: $S\to L(E,H)$ où $L(E,H)$ est l'ensemble des applications linéaires de E dans H. On cherche des représentations intégrales du noyau K de type positif relativement à E_1, de la forme:

$$K(x,y)=\int_S\langle d\sigma(\lambda)u(\lambda)x,u(\lambda)y\rangle,\ \ (\forall x,y\in E_1) \qquad (11)$$

où le symbole < .,.> désigne le produit scalaire dans H, $d\sigma(\lambda)$ une mesure fortement σ-additive, définie sur la classe des boréliens de S et dont les valeurs, sur les ensembles relativement compacts, sont des opérateurs positifs et continus sur H.

Pour obtenir des résultats concrets sur les représentations intégrales de noyaux K sur E (défini-positif ou de type positif relativement à un s.e.v. de E), il est nécessaire d'introduire les structures supplémentaires suivantes: on suppose qu'il existe des opérateurs $A\in L(E,E)$, u, $v\in L(E,H)$ vérifiant la relation suivante, appelée Identité Unitaire Fondamentale (I.U.F.) [2]:

$$-K(x,y)-K(Ax,Ay)=\langle ux,vy\rangle+\langle vx,uy\rangle\ , \quad (\forall x,y\in E). \quad (12)$$

En utilisant les notations suivantes:

$$y^*Kx=K(x,y), y^*(A^*KA)x=K(Ax,Ay), y^*v^*ux=\langle ux,vy\rangle$$

et:

$$y^*u^*vx=\langle vx,uy\rangle,\quad (\forall x,y\in E).$$

La relation (12) s'écrit alors:

$$y^*(K-A^*KA)x=y^*(v^*u+u^*v)x,\quad (\forall x,y\in E)$$

ou symboliquement:

$$K-A^*KA=v^*u+u^*v. \quad (13)$$

***Définition*:** *L'agrégat formé de l'espace vectoriel E, du noyau K, de l'espace hilbertien H et des opérateurs* $A\in L(E,E)$, $u,v\in L(E,H)$ *reliés par l'identité (13) est appelé PRENOEUD (ou SEMI-NOEUD) UNITAIRE. Dans ce cas, le noyau K est dit métrisant le prénoeud.*

En introduisant les notations suivantes:

$$D=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}\quad \mathbf{H}=H\oplus H,\quad J=\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix},$$

où I est l'opérateur identité dans H, la relation (13) s'écrit alors:

$$K-A^*KA=D^*JD. \quad (14)$$

On désigne le prénœud par:

$$\alpha=\begin{pmatrix}A & J & D\\ E & K & \mathbf{H}\end{pmatrix} \quad (15)$$

Dans notre cas, l'ensemble S est le cercle unité dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, noté $\mathbb{T}$.

Pour éviter des "pathologies" sur le spectre de A, dues au fait que l'e.v. E n'est muni d'aucune topologie, on suppose que les deux conditions suivantes sont satisfaites:

1) condition spectrale pour le prénoeud unitaire α: pour tout $x\in E$, il existe un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$, noté Σ_x, tel que $\Sigma_x\cap\mathbb{T}=\varnothing$ et $\forall\lambda\in\mathbb{C}-\Sigma_x$, l'équation $(I-\lambda A)\,z=x$ admet une solution unique, notée $z=(I-\lambda A)^{-1}x$ telle que: **a)** pour tout $y\in E$, la fonction scalaire $K((I-\lambda A)^{-1}x,y)$ est analytique par rapport à λ dans $\mathbb{C}-\Sigma_x$; **b)** les fonctions vectorielles, à valeurs dans H, $u(I-\lambda A)^{-1}x$ et $v(I-\lambda A)^{-1}x$ sont analytiques par rapport à λ dans $\mathbb{C}-\Sigma_x$;

2) condition de non-dégénérescence pour le prénoeud α: l'image uE est dense dans H et il existe au moins un point $\lambda_0\in\overline{\mathbb{C}}-\mathbb{T}$, où $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ tel que:

$$\sup_{\substack{e\in uE\\ \|e\|=1}}\ \inf_{\substack{x\in E\\ ux=e}}\sqrt{\left(\frac{K((I-\lambda_0A)x,(I-\lambda_0A)x)}{1-|\lambda_0|^2}\right)}+\|vx\|<\infty$$

si $\lambda_0\neq\infty$. Pour $\lambda_0=\infty$, l'expression sous le radical est remplacée par $K(Ax, Ax)$.

Dans cet article, on obtient des résultats sur les représentations intégrales de noyaux de type positif relativement au s.e.v. E_1 dans le cas:

$$E_1=\bigcap_{o\le k\le r-1}\ker nA^k,\quad (r\in\mathbb{N}^*=\{1,2,3,...\}) \quad (16)$$

où $n\in L(E,H)$ est un opérateur vérifiant la relation:

$$u=\sum_{0\le k\le r}\alpha_k nA^k, \quad (17)$$

où u est l'opérateur figurant dans la relation (13) et α_k $(0\le k\le r)$ sont des opérateurs continus dans H. De plus, l'e.v. E est considéré comme la somme directe des s.e.v. E_1 et $\ker A^r$:

$$E=E_1\oplus\ker A^r. \quad (18)$$

La méthode utilisée ici consiste à réduire le problème des représentations intégrales d'un noyau de type positif relativement à un s.e.v., métrisant un prénoeud, au problème des représentations intégrales d'un noyau auxiliaire défini-positif, construit à partir du prénoeud initial, et métrisant un prénoeud auxiliaire de la forme:

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}A & J & D_1\\ E & K_1 & \mathbf{H}\end{pmatrix}\ ,\ D_1=\begin{pmatrix}u_1\\ v_1\end{pmatrix}, \quad (19)$$

où E, A, $\mathbf{H}$ et J figurent dans l'expression (15) de α, le noyau K_1 et les opérateurs u_1, v_1 sont définis par:

$$K_1=K-\sum_{0\le p\le q\le r-1}A^{*q}n^*\alpha^*_{q-p}vA^p-\sum_{0\le p\le q\le r-1}A^{*p}v^*\alpha_{q-p}nA^q, \quad (20)$$

$$u_1=nA^r,\quad v_1=\sum_{0\le q\le r}\alpha^*_{r-q}vA^q \quad (21)$$

***Lemme 1*:**

a) *Le noyau* K_1 *est métrisant pour le prénoeud* α_1*, i.e. on a:*

$$K_1-A^*K_1A=v_1^*u_1+u_1^*v_1. \quad (22)$$

b) *Les noyaux K et* K_1 *coïncident sur* $E_1\times E_1$*:* $y^*K_1x=y^*Kx$ $(\forall x,y\in E_1)$.

Démonstration:

a) On a:

$$K_1-A^*K_1A=K-A^*KA-\sum_{0\le p\le q\le r-1}A^{*q}n^*\alpha^*_{q-p}vA^p$$
$$-\sum_{0\le p\le q\le r-1}A^{*p}v^*\alpha_{q-p}nA^q+\sum_{0\le p\le q\le r-1}A^{*q+1}n^*\alpha^*_{q-p}vA^{p+1}$$
$$+\sum_{0\le p\le q\le r-1}A^{*p+1}v^*\alpha_{q-p}nA^{q+1}.$$

En utilisant l'I.U.F. (13) et la relation (17), et en arrangeant les termes, on obtient:

$$K_1-A^*K_1A=\sum_{0\le p\le q\le r}A^{*q}n^*\alpha^*_{q-p}vA^p$$
$$+\sum_{0\le p\le q\le r}A^{*p}v^*\alpha_{q-p}nA^q-\sum_{0\le p\le q\le r-1}A^{*q}n^*\alpha^*_{q-p}vA^p$$
$$-\sum_{0\le p\le q\le r-1}A^{*p}v^*\alpha_{q-p}nA^q$$
$$=\sum_{0\le q\le r}A^{*r}n^*\alpha^*_{r-q}vA^q+\sum_{0\le q\le r}A^{*q}v^*\alpha_{r-q}nA^r.$$

Ce qui est équivalent à $K_1-A^*K_1A=u_1^*v_1+v_1^*u_1$.

b) L'égalité $y^*K_1x=y^*Kx$ ($\forall x,y\in E_1$) découle immédiatement des définitions de K_1 et E_1.

Lemme 2: *Si:*

$$\ker v \supseteq \ker A^r \tag{23}$$

alors K_1 *s'annule sur le s.e.v.* $\ker A^r$, $K_1x=0$; $(\forall x\in \ker A^r)$, *i.e. que:*

$$y^*K_1x = x^*K_1y = 0 \quad (\forall x\in \ker A^r, \forall y\in E) \tag{24}$$

Si, de plus, on a la décomposition (18) *et si K est de type positif relativement à* E_1, *alors le noyau* K_1 *sera défini-positif sur E.*

Démonstration: On a $u_1x = nA^rx = 0$ $(\forall x\in \ker A^r)$, et d'après (23), on a aussi:

$$v_1x = \sum_{0\le p\le r}\alpha^*_{r-p}vA^px = 0 \quad (\forall x\in \ker A^r) \tag{25}$$

D'après (22) et (25), on obtient $K_1x=A^*K_1Ax$ ($\forall x\in \ker A^r$). De cette égalité, on tire successivement les implications suivantes:

$x\in \ker A \Rightarrow K_1x=0$;
$x\in \ker A^2 \Rightarrow Ax\in \ker A \Rightarrow K_1x=A^*K_1Ax=0$;
$x\in \ker A^3 \Rightarrow Ax\in \ker A^2 \Rightarrow K_1x=A^*K_1Ax=0$;

et ainsi de suite jusqu'à $x\in \ker A^r \Rightarrow K_1x=0$.

Montrons maintenant que K_1 est défini-positif sur E. Soit $z\in E$. D'après la décomposition (18) de E, il existe $x\in \ker A^r$ et y $x\in E_1$ tels que $z=x+y$. Comme K_1 s'annule sur $\ker A^r$, on a alors:

$$z^*K_1z = x^*K_1x + y^*K_1x + x^*K_1y + y^*K_1y = y^*K_1y.$$

Or K et K_1 coïncident sur E_1 (d'après **b)** du lemme 1), d'où:

$$z^*K_1z = y^*Ky$$

avec $z=x+y$, $x\in \ker A^r$, $y\in E_1$. De là découle l'équivalence suivante:

$$y^*Ky\ge 0 \quad (\forall y\in E_1) \Leftrightarrow z^*K_1z\ge 0, \ (\forall z\in E).$$

Citons le théorème de V.E. Katsnelson [1] sur les représentations intégrales de noyaux défini-positifs.

Théorème: *Soit K un noyau défini-positif sur un espace vectoriel E, métrisant le prénœud unitaire* α *de la forme (15) pour lequel les conditions spectrale et de non-dégénérescence sont vérifiées. Alors, il existe une mesure* $d\sigma(\lambda)$ *sur le cercle unité* $\mathbb{T}$ *dont les valeurs sont des opérateurs positifs dans l'espace hilbertien H (avec* $\sigma(\mathbb{T})<+\infty$*) donnant la représentation intégrale suivante du noyau K:*

$$K = \int_{\mathbb{T}} u^*(\lambda)d\sigma(\lambda)u(\lambda).$$

En utilisant les lemmes 1 et 2, ainsi que le théorème précédent de Katsnelson, on obtient le théorème suivant:

Théorème: *Soit K un noyau, métrisant le prénoeud* α, *de type positif relativement au s.e.v.* E_1 *défini par* (16) *où* n *est défini par* (17). *Supposons que les relations* (18), (23) *ainsi que les conditions spectrale et de non-dégénérescence du prénœud* α_1 *défini par* (19) *soient vérifiées. Alors, le noyau K admet au moins une représentation intégrale de la forme:*

$$y^*Kx = \int_{\mathbb{T}} y^*u_1^*(\lambda)d\sigma(\lambda)u_1(\lambda)x \quad (\forall x,y\in E_1) \tag{26}$$

où $u_1(\lambda)=u_1(I-\lambda A)^{-1}$, u_1 étant défini par (21) et $d\sigma(\lambda)$ est une mesure opératorielle sur H, c'est-à-dire dont les valeurs sont des opérateurs sur H ($\sigma(\mathbb{T})$ est un opérateur borné).

Remarque. Dans la représentation (26), figure la fonction $u_1(\lambda)$ du prénoeud α_1 et non la fonction $u(\lambda)$ du prénoeud α. Ce défaut peut être en partie éliminé de la manière suivante: soit le polynôme opératoriel:

$$\chi(\lambda) = \sum_{0\le k\le r}\alpha_k\lambda^{r-k},$$

où les α_k ($0\le k\le r$) sont définis dans (17), appelé polynôme caractéristique du s.e.v. E_1 et soit F_χ l'ensemble des $\lambda\in\mathbb{C}$ tels que l'opérateur $\chi(\lambda)$ n'est pas inversible. Si $\lambda\in\mathbb{C}-F_\chi$ et $x\in E_1$, alors on obtient $u_1(\lambda)=\chi^{-1}(\lambda)u(\lambda)$ et la représentation (26) s'écrit:

$$\begin{aligned} y^*Kx = &\int_{\mathbb{T}-F_\chi} y^*u^*(\lambda)\chi^{*-1}(\lambda)d\sigma(\lambda)\chi(\lambda)^{-1}u(\lambda)x \\ &+ \int_{F_x} y^*u_1^*(\lambda)d\sigma(\lambda)u_1(\lambda)x, \quad (\forall x,y\in E_1) \end{aligned} \tag{27}$$

où $d\sigma(\lambda)$ est la mesure définie dans (26). Comme $\chi(\lambda)$ est un polynôme, alors F_χ est un ensemble fini dans les cas suivants: **a)** $\dim H<+\infty$; **b)** les opérateurs α_k sont des scalaires multiples de l'unité.

Illustration. On peut illustrer les résultats précédents sur un exemple de représentations intégrales d'une suite d'opérateurs de type positif relativement à un s.e.v. Soit $E=H^{m+1}$ où H est un espace hilbertien et $(c_k)_{-m\le k\le m}$ une suite finie d'opérateurs dans H, vérifiant les conditions suivantes: pour $r\le m$, on a:

a) $c_k=0, \quad 0\le k\le r-1$;

b) $c_{-k}=c_k^* \quad (-m\le k\le m)$.

On définit le noyau K sur E par:

$$y^*Kx = \sum_{0\le p,q\le m}\langle c_{p-q}\xi_p,\eta_q\rangle,\ x=(\xi_p)_{p=0}^m,\ y=(\eta_q)_{q=0}^m, \tag{28}$$

où <.,.> est le produit scalaire dans H, et le s.e.v. E_1 de E par:

$$x=(\xi_k)\in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_0+\xi_1+\xi_2+\quad\ldots\quad+\xi_m = 0 \\ \xi_1+2\xi_2+3\xi_3+\quad\ldots\quad+m\xi_m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_{r-1}+\binom{r}{r-1}\xi_r+\ldots+\binom{m}{r-1}\xi_m = 0 \end{cases} \tag{29}$$

On dit que la suite d'opérateurs $(c_k)_{-m\le k\le m}$ est de classe G_m^r ou de type positif d'ordre $r\le m$ si elle vérifie les conditions **a)** et **b)**, et si le noyau K défini par la formule

(28) est de type positif relativement au s.e.v. E_1 défini par (29).

En introduisant les opérateurs A, u, v, n, α_k figurant dans la théorie comme suit:

soit $x = (\xi_p)_{p=0}^{m}, \xi_p \in H, p = 0,1,...,m,$

$A : E \to E$ est défini par $A \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ . \\ . \\ . \\ \xi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ . \\ . \\ \xi_m \\ 0 \end{pmatrix},$ (opérateur de translation)

u=[I_H,0,...,0], (I_H étant l'opérateur identité dans H), défini par $ux = \xi_0$, v=[c_0,c_1,...,c_m] défini par $vx = \sum_{p=0}^{m} c_p \xi_p$,

$n : E \to H$ défini par $n = u(I - A)^{-r}$, et $\alpha_k = (-1)^k \begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} I_H$,

où $\begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} = \frac{r!}{k!(r-k)!}$, ($k$=0,1,…,$r$) on obtient une représentation du noyau K (28):

$$x^* K x = \int_{\mathbb{T}-\{1\}} f^*(\lambda) \frac{d\sigma(\lambda)}{|\lambda - 1|^{2r}} f(\lambda) + \frac{\left(f^{(r)}(1)\right)^*}{r!} \sigma(\{1\}) \frac{f^{(r)}(1)}{r!} \text{ où}$$

$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \xi_k \lambda^k$ et $x = (\xi_k)_{0 \le k \le m} \in E_1$.

De même, on obtient des représentation intégrales des opérateurs c_p de la forme suivante: il existe un opérateur auto-adjoint continu $a : H \to H, a^* = a$ tel que:

$$c_r = (-1)^r \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} d\sigma(\lambda) + ia \right), \quad i^2 = 1$$

et:

$$c_p = c_r^* \sum_{0 \le k \le 2r-1} \begin{pmatrix} p+r \\ k \end{pmatrix} (-1)^k +$$

$$+ (-1)^r \int d\sigma(\lambda) \left(\frac{\lambda^{p+r} - \sum_{0 \le k \le 2r-1} \begin{pmatrix} p+r \\ k \end{pmatrix} (\lambda - 1)^k}{(\lambda - 1)^{2r}} \right)^r$$

$$+ (-1)^r \sigma(\{1\}), \quad (p = r, r+1, ...).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1]- Katsnelson V.E., "Problème général sur les représentations intégrales de noyaux hermitiens associés à un prénoeud", Déposé à UkrNIINTI, 10.04.1987, n 603-87, 44p. (en russe).

[2]- Katsnelson V.E., "Inégalité matricielle fondamentale du problème de la décomposition d'un noyau défini-positif en produits élémentaires", Rapports de l'Académie des Sciences de l'URSS, A, n°2, (1984) , pp. 10-12.

[3]- Krein M.G., "Sur le problème du prolongement des fonctions continus hermitiennes positives", Rapports de l'Ac. Sc. URSS, T.26, n°1, (1940), pp.17-21 (en russe).

[4]- Krein M.G., "Sur le logarithme des fonctions défini-positives indéfiniment divisibles", Ac. Sc. URSS, 46, (1945), pp. 339-342 (en russe).

[5]- Horn R., "The theory of infinitely divisible positive definites matrices and Kernels", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 136, (1969), pp. 269-286.

[6]- Horn R., "Infinitely divisible positive definite sequences", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 136, (1969), pp. 287-303.

[7]- Schoenberg I., "Metric spaces and positives definite functions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 44, (1938), pp. 522-536.

[8]- Akhiezer N.I., "Problème classique des moments", pp. 264-268 (en russe).

[9]- Khelifati S., "Représentations intégrales de suites de type positif", Déposé à UkrNIINTI, 26.06.1986, n 1473.Uk, p.119 (en russe).